Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1

(*E.P.I.T.A. PT 2018*)

Dans cet exercice, on étudie par deux méthodes la nature de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on introduit la somme partielle :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. *Question préliminaire*
   Étudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$.
   En déduire que cette suite admet une limite finie L ou bien diverge vers $+\infty$.
2. *Première méthode*
   (a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$
   (b) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. *Deuxième méthode*
   (a) Vérifier l'inégalité suivante pour tout entier $k \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$
   (b) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$$
   En déduire l'inégalité $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   (c) Établir la divergence de $(H_n)_{n\geqslant 1}$ vers $+\infty$ et montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = H_n - \ln(n)$.
   Étudier le signe de l'expression $\gamma_n - \gamma_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ et montrer que $0 \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.
   En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ vers un réel γ appartenant à $[0, 1]$ et la formule :
   $$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice 2

(Adapté de Banque PT 2021)

On étudie le processus de fonctionnement d'un appareil utilisé chaque jour dans une usine et susceptible de subir des pannes accidentelles. On fait les hypothèses suivantes :

— Le comportement de l'appareil au jour $n+1$ ne dépend que de son état au jour n et pas des jours précédents.

— Si l'appareil fonctionne le jour n, il a une probabilité α d'être en panne le jour $n+1$.

— Si l'appareil est en panne au jour n, il a une probabilité β d'être réparé et de fonctionner le jour $n+1$.

— On a $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$.
Formellement, si l'on appelle X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'appareil fonctionne le jour n et 0 si l'appareil est en panne au jour n, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = \alpha,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = \beta.$$

1. On note $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.
   (a) Calculer p_2 en fonction de p_1.
   (b) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$p_{n+1} = \beta + (1 - \alpha - \beta)p_n.$$
   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de p_1.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
2. On suppose maintenant que l'appareil est en fonctionnement le premier jour. On note N le numéro du jour où cet appareil tombe en panne pour la première fois. Montrer que $N - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 3

(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2008)

Dans tout ce problème, n désigne un entier non-nul, a et b sont deux nombres réels.

La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

Partie I — Étude de φ_1

Dans tout cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \qquad \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \left(X - \frac{a+b}{2}\right)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$et b pour que φ_1 zoit bijective.
4. On suppose, dans cette question seulement que $a \neq b$
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (X-a, X-b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$
   (b) Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$
   (c) Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.
   (d) Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices $M, M_1, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.
   (e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3 \ , \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$.
   (a) Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2
   (c) Déterminer une base de Γ.
6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux sous-espaces vectoriels concernés).

Partie II — Quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On se propose dans cette question de déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$. On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.
   (a) Démontrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab} \end{array}$ est continue sur I.
   (b) Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.
   (c) Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle
   $$(E) : \qquad y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)} y = 0$$
   (d) On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p})$.
   (e) On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Exercice 4

(Adapté de Ecricome S 2015)

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
   $$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que :
   $$\forall x \in I, \ g(x) < x < f(x).$$
2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1.(f) un encadrement de π.
3. On pose pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.